Algoritmizácia stability svahu II

Vladimír Budinský*
*(Ing.Vladimír Budinský, Aut.Ing., Banská Bystrica)

Je 4.novembra 1960. Jedna z najväčších klenbových priehrad sveta, nádrž Vaiont v talianskych Alpách je už čiastočne naplnená. Tesne po dokončení hrádze preukázal jeden zo špičkových geologických tímov, podieľajúcich sa na prieskumoch, existenciu fosílneho (predvekého) zosuvu na ľavom brehu nádrže. Podľa predpokladaného tvaru šmykovej plochy sa usúdilo, že stabilita je zatiaľ dostatočná. Avšak pri napúšťaní vody svah náhle „ožil“. Objavili sa ťahové trhliny a celá oblasť bola pozorne sledovaná. Náhle sa z čela svahu odtrhlo 700 000 m^3 horniny (ako kocka o strane 88 m) a zrútilo sa do vody. Napriek obrovským pochybnostiam o budúcej existencii diela sa nádrž začala ďalej napĺňať. Boli zrealizované ďalšie veľmi podrobné geotechnické prieskumy a technické úpravy. Celá oblasť sa nepretržite veľmi presne merala. Posun svahu sa upravil na 3÷5 mm za deň. V roku 1963 18.septembra sa rýchlosť pohybov začala exponenciálne zvyšovať. 8.októbra bola rýchlosť čela zosuvu 0,5 m za deň. Nádrž sa začala naplno vypúšťať, ale bolo už neskoro. 9.októbra 1963 o 22:38 sa rýchlosťou vyše 100 km/hod v priebehu 45 sekúnd zrútilo 260 000 000 m^3 (ako kocka o strane 638 m) jurských a kriedových vápencov i slieňov do nádrže, čo spôsobilo prelivovú vlnu 100 m (!) nad korunou hrádze. Ešte predtým však primárna vlna stačila zničiť dedinu Casso, umiestnenú 260 m nad pôvodnou hladinou na náprotivnom brehu. Časť mesta Longarone zmizla z povrchu zemského. Zničené boli aj ďalšie obce Pirago a Villanova. Trvalo 38 rokov, kým sa režisér a producent Renzo Martinelli odhodlal nakrútiť film s rovnomenným názvom Vaiont (2001)…

Na **obrázku 1** sú znázornené obnažené klzné plochy po zosunutých masách na svahoch vrchu Monte Toc nad Vaiontom. Podrobnejšie o priebehu, príčinách a následkoch katastrofy si povieme v niektorom z ďalších článkov.

Obrázok 1

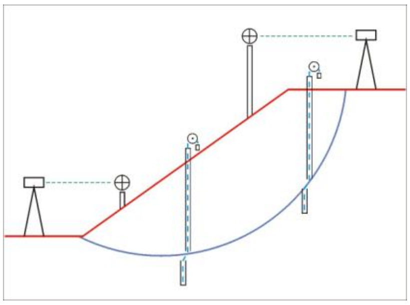
ÚVOD

V druhom nezáväznom pokračovaní problematiky sa zameriame viacej na používané výpočtové programy aj za hranicami, pričom si trochu viacej posvietime na numerické metódy, konkrétne na metódu konečných prvkov (MKP).

Pri analýze svahových pohybov je prvoradý a určujúci kvalitný geotechnický prieskum, inžinierske riešenie a cit, ako aj výstižné kontrolné merania (**obrázok 2**). Matematické modelovanie môže slúžiť len ako pomôcka, aj keď v poslednom čase sa stáva čím ďalej nezastupiteľnejšou. Je tu však jedno veľké nebezpečie. Aj pri veľmi presvedčivo vyzerajúcich grafických výsledkoch, získaných pomocou profesionálnych programov, môžu byť tieto pri nesprávnych predpokladoch vstupných údajov celkom scestné a klamlivé. Takže sa budeme držať toho, že počítačový program je veľmi dobrý radca, ale zlý pán.

Pri matematickom modelovaní horninového telesa môžeme používané metódy rozdeliť na **analytické** (klasické) a **numerické** (najčastejšie MKP).

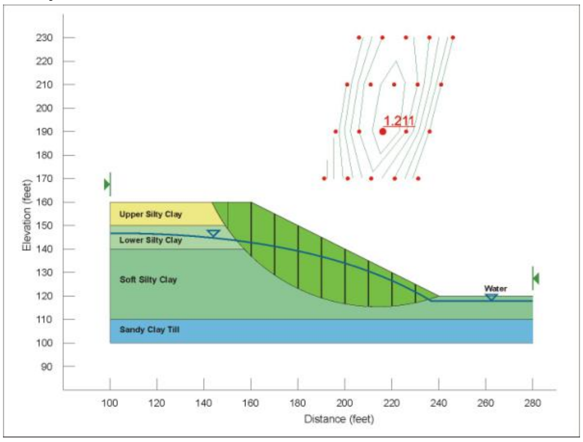
Analytické metódy sú jednoduchšie [1] a vychádzajú z podmienok medznej rovnováhy. Nemôžu nám však poskytnúť poznatky o rozložení napätia v telese a pozdĺž šmykovej plochy, o miestach počiatočného progresívneho porušenia, ani časový vývin napätí a posunov v jednotlivých fázach, tzv. mechanizmus porušovania. O to sa pokúšajú pomocou rôzne výstižných modelov až numerické metódy. Naviac, ak sa chceme dozvedieť niečo o skutočnom chovaní horninového masívu, výpočty musia byť výrazne nelineárne, a to ako fyzikálne, tak aj geometricky.



Obrázok 2

ANALYTICKÉ METÓDY

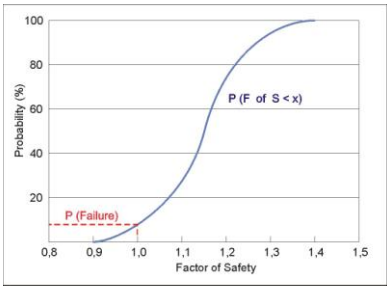
Analytické metódy sú postačujúce, pokiaľ zisťujeme len stupeň stability svahu.



Obrázok 3

Uveďme si niektoré nadštandardné možnosti špičkového svetového softwaru SLOPE/W kanadskej firmy GEO-SLOPE. Program vyšetruje analytickými metódami stabilitu svahu (**obrázok 3**). Okrem množstva bežných, ako aj rozšírených funkcií, umožňuje napr.

- definíciu šmykovej pevnosti ako funkciu napätia alebo uhla šmykovej plochy, pričom funkcie možno modelovať aj graficky myšou
- definovať bilineárne Mohr-Coulombove obálky porušenia
- získať medziprúžkové sily pomocou viacerých volieb
- pravdepodobnostnú analýzu metódou Monte Carlo. Každý vstupný parameter možno zadať ako štatistický súbor. Výsledky analýzy možno zobraziť ako histogram alebo pravdepodobnostnú distribučnú funkciu (**obrázok 4**).

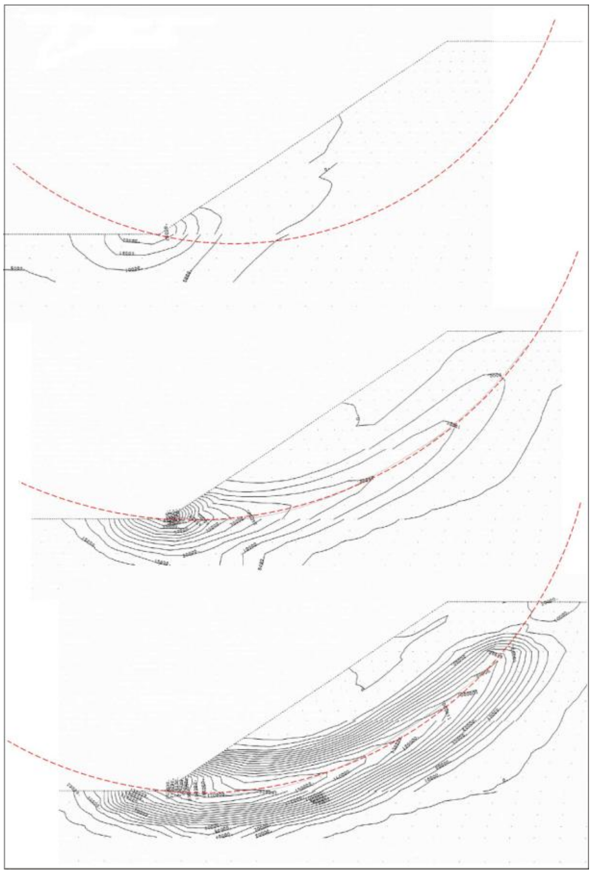


Obrázok 4

Z programov využívajúcich analytické metódy spomeňme ešte program GLEITK nemeckej softwarovej firmy RIB. V podstate zásady uvedené v [1] program rozširuje o niektoré grafické možnosti pri práci s programom a o bohaté výstupy zostáv a obrázkov.

NUMERICKÉ METÓDY

Autori v [4] uvádzajú : *„Princípy MKP sú jednoduché a všeobecne známe“*. Dovolím si **nesúhlasiť** s prvou časťou výroku, že princípy MKP sú jednoduché. MKP sama osebe predstavuje jeden z vrcholov ľudského umu a ešte zďaleka nie je uzavretá. Konkrétna počítačová implementácia predstavuje len malý vrcholček pyramídy úsilia vedcov, bádateľov, programátorov a inžinierov. Naviac MKP je len možnou súčasťou ešte zložitejšieho procesu. Je to živá disciplína, stále vznikajú stovky prác.



Obrázok 5

Ako prostriedok k riešeniu stability svahu budeme mať v ďalšom na mysli teoretické riešenie steny MKP ako dvojdimenzionálnu úlohu. (Trojdimenzionálne úlohy sa zatiaľ ukazujú ako príliš komplikované). Uveďme si okruhy problémov ako **zdrojov**, ktoré treba zvládnuť, kým sa prehryzieme k vlastnej MKP :

Matematická pružnosť ● tenzor napätia, tenzor deformácie ● fyzikálne a geometrické rovnice, diferenciálne rovnice rovnováhy ● rovnice kompatibility, okrajové podmienky ● základné rovnice pružnosti (Lamé, Beltrami) ● Airyho funkcia ● minimum potenciálu energie ● variačné metódy (Lagrange, Castigliani, Ritz, Galerkin)

Matematika ● infinitezimálny počet ● maticový počet ● polynomiálna interpolácia ● funkcionálna analýza ● variačný kalkul

Keďže toto sme „hravo“ zvládli, skúsme si zadefinovať, čo to vlastne MKP je. Tak napríklad jedna z možných definícií :

MKP je založená na variačnej formulácii okrajových problémov (na riešení integrálnych identít), využíva základnú vlastnosť integrálu – aditivitu, tj. integrál z merateľnej funkcie na danej oblasti je súčtom integrálov cez ľubovoľný počet navzájom disjunktných podoblastí, ktorých zjednotenie sa rovná pôvodnej oblasti.

Alebo : *MKP prevádza riešenie diferenciálnych úloh na riešenie sústav lineárnych algebraických rovníc*. Najťažšie na MKP je zrejme zostavenie bázových funkcií a integrácia prvkov matice tuhosti a_{ij} ako riešenie minima funkcionálu, ako aj vlastné pochopenie variačnej formulácie riešenia problému. Technické komplikácie pri praktickom zostavovaní matice tuhosti a vektora zaťaženia sú značné. Pokus popísať vyčerpávajúcim spôsobom návod na konkrétne postupy by vlastne znamenal vypracovať projekt implementácie MKP pre riešenie len určitej skupiny problémov, čo presahuje rámec takmer každej publikácie a *„pravdepodobne vôbec možnosti jedného človeka“* [2].

Pri riešení praktických úloh ide vždy o vzájomnú súhru viacerých prístupov, ktorých výsledky sa navzájom ovplyvňujú. Z matematického hľadiska je MKP aproximáciou riešenia funkciami, ktoré sú po kusoch polynomiálne. Z tohoto pohľadu sa za historický začiatok metódy považuje práca Couranta : *R.Courant : „Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration“, 1943*. V inžinierskych prácach stojí za zmienku článok *Hrennikoff, A.: „Solutions of problems in elasticity by the framework method“, 1941*. Ďalej inžinieri *Levy,S.: „Structural analysis and influence coefficients for delta wings“, 1953* a *Argyrys, J.H.: „Energy theorems and structural analysis“, 1954 a „Matrizentheorie der Statik“, 1957*. Zmieňme sa ešte o práci *Zienkiewicz, O.S., Cheung, Y.K.: „The finite element method in structural and continuum mechanics“, 1967.*

Funkčné prototypy algoritmov boli pre verejnosť uvoľnené na univerzite v Berkeley, napísané v rámci univerzitného výskumu.

Je zaujímavé, že matematici rozpoznali dôležitosť MKP až neskôr. Rozpracovanosť solídnych základov matematickej teórie sa datuje do 60-tych rokov minulého storočia.

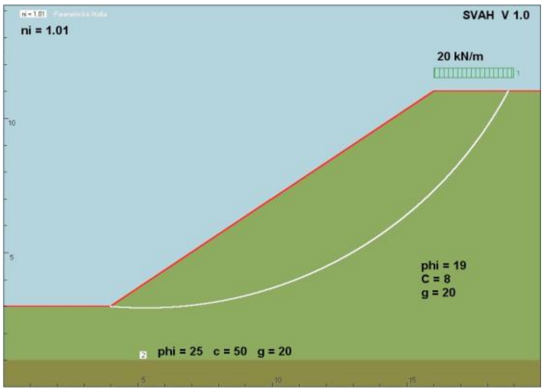
MKP je dlhodobo a jemne vyladená metóda, riešenie nie je jednoznačné. Zhruba si to možno predstaviť tak, že sa nepoznalo presné riešenie problému a preto sa hľadali (matematicky veľmi rafinované) postupy, ako by riešenie mohlo vyzerať a potom sa definovali odhady chýb ako odchylky od presného riešenia. Ešte inak povedané, inžinieri počítajú a vypočítali to, čo sa vlastne nedá vypočítať.

Pre rozdiel približného riešenia y_N a presného riešenia y platí nerovnosť vyjadrená strednou kvadratickou odchylkou

$\|y-y_N\|_p \leq M\|y-y_A\|_p$

kde M je konštanta nezávislá na voľbe podpriestoru D_N z priestoru D ($D_N \in D$), y_A je ľubovoľná funkcia z priestoru D_N a index p značí, že máme na mysli normu v Sobolevovom priestore H^p. Približné riešenie y_N je potom z priestoru D_N.

Obrázok 6



Zjednodušene na jednorozmernom priestore možno podstatu variačnej metódy používanej v MKP naznačiť ako riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$-[p(x)y']' + q(x)y = f(x)$

pre $x \in \langle a,b \rangle$ vo forme hľadania minima funkcionálu

$F(u) = \int_{ab}\{p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2\}dx - 2\int_{ab} f(x)\, u(x)\, dx.$

Zvolí sa priestor $D_N \in D$ a za aproximáciu riešenia úlohy sa pokladá funkcia y_N , v ktorej dosahuje funkcionál F(u) minima na konečnodimenzionálnom podpriestore D_N. Do množiny D patria všetky spojité a po častiach spojité diferencovateľné funkcie v intervale <a,b>, ktoré spĺňajú homogénne okrajové podmienky. Ak zvolíme v priestore D_N bázu tvorenú funkciami $\Phi_1 \ldots \Phi_N$ (ktoré sú lineárne nezávislé funkcie z priestoru D_N, také, že každý prvok tohoto priestoru sa dá písať ako ich lineárna kombinácia), je hľadaná aproximácia daná vzorcom

$y_N = \sum_{(k=1 \text{ až } N)} c_k\, \Phi_k(x),$

pričom koeficienty $c = [c_1 \ldots c_N]^T$ sú riešením sústavy lineárnych rovníc $\mathbf{Ac} = \mathbf{g}$, kde $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu N, ktorej prvky a_{ij} sa určia zo vzorcov

$a_{ij} = [\Phi_i\Phi_j] = \int_{ab} [p(x)\Phi'_i(x)\, \Phi'_j(x) + q(x)\,)\Phi_i(x)\, \Phi_j(x)]dx$

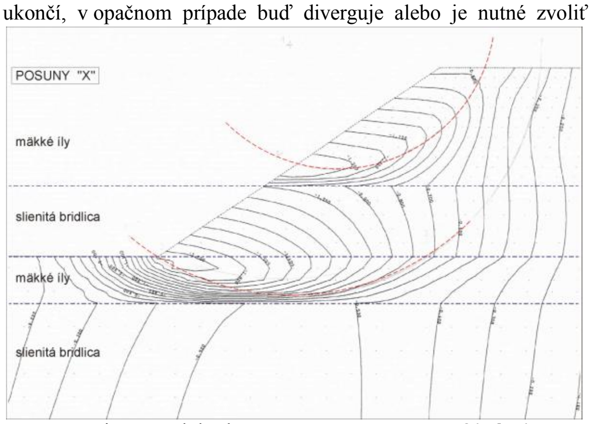
a $\mathbf{g} = [g_1 \ldots g_N]^T$ je N-dimenzionálny vektor, prvky ktorého

$g_i = \int_{ab} f(x)\, \Phi_i(x)\, dx$.

Pri riešení steny ako dvojdimenzionálneho problému sa postup o niečo skomplikuje, pretože riešime parciálnu diferencionálnu rovnicu 4-rádu.

Zostaviť z takto formulovaného myšlienkového procesu funkčný program je značne komplikované, napriek tomu sa v priebehu vývoja podarilo vyvinúť určité overené postupy, pomocou ktorých sa dá veľmi efektívne naprogramovať aj veľmi zložitý fyzikálny problém. Do väčších ťažkostí sa môžeme dostať, keď jednotlivý elementárny krok postupu separujeme a chceme ho bližšie analyzovať, a nebodaj exaktne dokazovať.

K všeobecne známej diskretizácii riešenej oblasti na konečné prvky, zohľadneniu okrajových podmienok, vonkajšieho zaťaženia a riešenia pomocou systému rovníc, pristupuje pri stabilite svahu geometrická a fyzikálna nelinearita, tj. zmena podmienok zaťaženia na sústavu po jej deformácii a zmena pevnostných charakteristík materiálu po rozpredelení napätí a deformácií. V podstate to znamená diskretizáciu riešenia v čase, pričom v každom časovom kroku je nutné znovu zostrojiť maticu tuhosti pre nové vlastnosti materiálu a novú polohu sústavy, resp. nelineárne riešenie sa získava ako postupnosť kvázilineárnych krokov. Materiálové vlastnosti sa menia podľa funkčných závislostí pracovných diagramov a stavu pretvorenia horniny. Podľa rôzneho prístupu k zmene fyzikálnych vlastností (tzv. konštitučných vzťahov) sa rozlišujú jednotlivé metódy (napr. elasticko-plastická). V priebehu takéhoto iteračného riešenia sa sleduje hodnota niektorého vybraného parametra a jeho konvergencia. Takýmto parametrom môže byť napr. rozdiel posunov bodu medzi dvomi za sebou nasledujúcimi iteračnými krokmi. Pri splnení kritéria sa riešenie ukončí, v opačnom prípade buď diverguje alebo je nutné zvoliť väčší počet iteračných krokov.

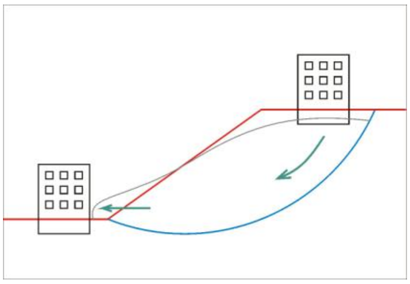


Obrázok 7

Na **obrázku 5** na jednoduchom názornom príklade nelineárneho výpočtu MKP sú zobrazené funkcie tečenia, na ktorých vidno rozvoj šmykovej plochy od päty svahu. Použitý elasticko-plastický model podľa Mohr-Coulomba. Ten istý profil tejto parametrickej štúdie je pre porovnanie znázornený aj ako výsledok analytickej metódy pri stupni bezpečnosti 1 pomocou programu SVAH na **obrázku 6**. Tomuto stupňu zodpovedá vstupnými údajmi horný profil obrázku 5. Na **obrázku 7** je vrstevnaté podložie z tuhšou vrstvou slienitých bridlíc, kde sa postupne vyvíjajú dve potenciálne šmykové plochy v mäkkých íloch, badateľné (pre zmenu) na izočiarach horizontálnych posunov X.

Nakoniec si uvedieme orientačne **približné cenové relácie** niektorých komerčných programov :

Program	krajina pôvodu	cena
metóda medznej rovnováhy (analytické) :		
SLOPE/W	CAN	130 000 Sk
GLEITK	D	35 000 Sk
FINE GEO4	CZ	18 000 Sk
SVAH	SK	8 000 Sk
MKP - nelineárne výpočty :		
SIGMA/W	CAN	130 000 Sk
RIB Tunel	D	290 000 Sk
PLAXIS	NL	420 000 Sk
SOFiSTIK ASE	D	1 000 Sk / deň – prenájom



Obrázok 8

ZÁVER

Prakticky každý prípad založenia stavby na alebo pri svahu by mal mať aspoň predbežný posudok stability svahu na podklade geologického prieskumu za pomoci jednoduchších programov medznej rovnováhy (analytických), resp. ručného výpočtu.

Pritom je treba zohľadniť možné (aj budúce) zásahy do svahu (zárezy, resp. násypy). (**Obrázok 8**) V prípade preukázateľne nižších hodnôt koeficientov bezpečnosti by mala nasledovať podrobnejšia analýza problému a zhodnotenie geotechnického rizika. V zložitejších a opodstatnených prípadoch nastupuje geotechnický monitoring (prípadne aj za pomoci numerických metód) a spätné analýzy pre vstupné hodnoty matematického modelu.

Osobitnú skupinu tvoria samozrejme líniové stavby, hrádze, mosty, priehrady, tunely, lomy, banské diela a pod., kde sú tieto postupy nevyhnutnosťou.

LITERATÚRA

[1] Vladimír Budinský: Algoritmizácia stability svahu, PROJEKT a STAVBA 12/2002

[2] Emil Vitásek: Numerické metody, SNTL 1987

[3] Alexandr Rozsypal: Kontrolní sledování a rizika v geotechnice, JAGA 2001

[4] Quido Záruba, Vojtěch Mencl: Sesuvy a zabezpečování svahů, Academia 1987

[5] Arnold Nemčok: Zosuvy v slovenských Karpatoch, VEDA 1982

[6] časopis GEOTECHNIKA 2/2000, CZ

[7] SLOPE/W Technical Overview, GEO-SLOPE International Ltd., 2002

[8] GLEITK, http://www.rib.cz

[9] Marián Slodička: Metóda konečných prvkov, UK Bratislava, 2001

[10] Marta Doležalová: Modelování creepu v rovinných úlohách MKP, ČSVTS 1990

[11] Marta Doležalová, Vlasta Zemanová, Alena Hoření: Stabilitní problémy velkolomů u úpatí Krušných hor (analýza numerickými metodami MKP), Inžinierske stavby 1/1989

ANNOTATIONS

Algorithmization of slope stability II

The second loose continuation of the topic deals with the subject of numeric modeling of slope stability problems with a special focus on the method of final elements, its mathematical substance and historical roots. The article is completed by graphic examples of the aplication in comparison with simpler analytical methods. In the end of the article is provided an indicative list of software products.